SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Martino Vittorio

SOLUZIONE VISCOSA LIPSCHITZIANA DELL'EQUAZIONE DI TRACCIA DELLA FORMA DI LEVI IN $\mathbb{C}^{N+1}$

8 marzo 2005

Sunto. Partendo dalla definizione di forma di Levi per ipersuperfici reali di $\mathbb{C}^{N+1}$, si arriva a scrivere l'equazione di traccia per i grafici in $\mathbb{R}^{2N+2}$. Per il problema di Dirichlet associato si dimostra l'esistenza di una unica soluzione viscosa utilizzando il metodo di Perron (adattato alle soluzioni viscose) ed un principio del confronto (sempre per soluzioni viscose). Si riesce a dimostrare che questa soluzione oltre ad essere continua è anche lipschitziana; in particolare si mostra la locale lipschitzianità della soluzione, indipendentemente dal dato al bordo.

Abstract. Starting from the definition of the Levi's form for a real hypersurface in $\mathbb{C}^{N+1}$, we write the trace equation for graphs in $\mathbb{R}^{2N+2}$. By using the Perron's method (adapted to viscosity solutions) and a comparison principle, we prove the existence of a unique viscosity solution for the associated Dirichlet problem. Moreover, by using a regularization method and a barrier argument, we show that this solution is Lipschitz-continuous. We also give a condition on the right hand side of the trace equation which guarantees that the viscosity solution is locally Lipschitz continuous, independently of the boundary data.

Soluzione viscosa lipschitziana dell'equazione di traccia della forma di Levi in $\mathbb{C}^{N+1}$

V. Martino *

1 Introduzione

La forma di Levi è legata allo studio di problemi nella teoria di più variabili complesse (domini di olomorfia, pseudoconvessità) e in quella delle varietà CR (si vedano ad esempio [5], [2], [9], [15], [12], [13], [16], [14], [8]).
Nel caso $N = 1$, i primi a studiare soluzioni viscose (lipschitziane) dell'equazione di traccia associata, sono stati Slodkowski e Tomassini ([12]); poi Citti, Lanconelli e Montanari ([3]) hanno dimostrato, sotto opportune ipotesi, la regolarità C^∞ delle soluzioni lipschitziane. Per quanto riguarda il caso N-dimensionale ($N > 1$), l'unico risultato in letteratura è un principio del massimo forte, dimostrato (in realtà per una classe più ampia di operatori) da Lanconelli e Montanari ([11]).
Va inoltre osservato, che questa equazione viene spesso chiamata anche equazione di pseudocurvatura media (o di curvatura media di Levi), conseguenza della analogia tra la forma di Levi per ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{N+1}$ e la forma di Gauss per quelle in $\mathbb{R}^{N+1}$. Va sottolineato, però, che mentre l'equazione di curvatura media (classica) si scrive in forma di divergenza ed è ellittica, quella di pseudocurvatura media non è possibile scriverla in tale forma e, in più, poichè la parte caratteristica ha un autovalore identicamente nullo, non è ellittica.
Questa equazione viene qui studiata inizialmente con i metodi della teoria delle soluzioni deboli, nel senso viscoso, introdotte da Crandall, Ishii e Lions ([7], [4]) per trovere una (unica) soluzione viscosa, e poi, usando un metodo di regolarizzazione (ellittica) e di conseguente passaggio al limite, per mostrare la regolarità lipschitziana; infine la locale lipschitzianità si dimostra sfruttando una disuguaglianza derivante dalla struttura dell'equazione.
Il lavoro è articolato nel seguente modo: si definisce la forma di Levi per ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{N+1}$ visti come bordi di domini regolari e si costruiscono le classiche funzioni elementari degli autovalori

*Risultati ottenuti in collaborazione con A. Montanari (della forma di Levi); poi si passa dai domini in $\mathbb{C}^{N+1}$ ai grafici di funzioni reali in $\mathbb{R}^{2N+2}$ e si definisce l'equazione di traccia; si dimostra un principio del confronto per soluzioni viscose e si applica il metodo di Perron adattato (alle soluzioni viscose) in modo da trovare una unica soluzione del problema di Dirichlet; si ricava una stima del gradiente per soluzioni (classiche) del problema regolarizzato e con una passaggio al limite si arriva alla regolarità lipschitziana (globale), infine si mostra la locale lipschitzianità, sotto una opportuna condizione sulla funzione (pseudocurvatura) assegnata. Per le dimostrazioni dei risultati citati, si rimanda a ([10]), inoltre viene riportata, in fondo, una appendice con definizioni e proprietà sulle soluzioni viscose.

2 La forma di Levi per ipersuperfici in $\mathbb{C}^{N+1}$

Si consideri una ipersuperficie M bordo di un sottoinsieme di $\mathbb{C}^{N+1}$ definito mediante una funzione regolare reale:

$$D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) < 0\}, \quad M = \partial D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) = 0\}$$

dove $f : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{C}^{N+1})$ è tale che $\partial_p f := (f_1(p), \dots, f_{N+1}(p)) \neq 0$, per ogni $p \in M$, con la notazione

$$f_l := \frac{\partial f}{\partial z_l}, \quad f_{\bar{l}} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_l} \quad l = 1, \dots, N+1$$

Su M è indotta in maniera canonica una struttura CR data da $T_{1,0}(M) = T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \cap T^{\mathbb{C}}(M)$, con $dim_{\mathbb{C}}(T_{1,0}(M)) = N$ e $T_{0,1}(M) = \overline{T_{1,0}}(M)$. Risolvendo il seguente sistema nelle incognite α

$$\langle \partial f, \alpha^j \rangle = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\alpha}_k^j \frac{\partial f}{\partial z_k} = 0\,, \quad j = 1, \dots, N$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto interno hermitiano in $\mathbb{C}^{N+1}$, si può ottenere una base (non ortonormale) di $T_{1,0}(M)$ costituita dai campi

$$T_j = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\alpha}_k^j \frac{\partial}{\partial z_k}\,, \quad j = 1, \dots, N$$

Si consideri ora la matrice Hessiana complessa di f in $p \in M$

$$Hess_p(f) := \Big(f_{j,\bar{k}}(p) \Big)_{j,k=1,\dots,N+1}$$

Allora, se

$$Z_p = \sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad W_p = \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

con $Z_p, W_p \in T_{1,0\,p}(M)$, la forma di Levi è data da

$$\mathcal{L}_p : T_{1,0\,p}(M) \times T_{0,1\,p}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{W}_p) = \langle Hess_p^T(f) Z_p, W_p \rangle = \sum_{j,k=1}^{N+1} f_{j,\bar{k}} \alpha_j \bar{\beta}_k$$

In questo contesto il dominio D si dirà strettamente pseudoconvesso se per ogni $p \in M$

$$\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{Z}_p) = \sum_{j,k=1}^{N+1} f_{j,\bar{k}} \alpha_j \bar{\alpha}_k > 0$$

per ogni $Z_p \in T_{1,0\,p}(M)$. Se invece, per ogni $p \in M$

$$\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{Z}_p) = 0$$

per ogni $Z_p \in T_{1,0\,p}(M)$, allora D si dirà Levi-piatto.

Ora, se $B = \{E_1, \ldots, E_N\}$ è una base ortonormale di $T_{1,0\,p}(M)$, si ponga

$$\mathcal{L}_{j\bar{k}} = \frac{1}{|\partial_p f|} \mathcal{L}_p(E_j, \overline{E}_k), \quad j, k = 1, \ldots, N$$

La matrice hermitiana $N \times N$

$$L_p(f, B) = \frac{1}{|\partial_p f|} \Big(\langle Hess_p^T(f) E_j, E_k \rangle \Big)_{j,k=1,\ldots,N} = (\mathcal{L}_{j\bar{k}})_{j,k=1,\ldots,N}$$

si chiama forma di Levi B-normalizzata di ∂D nel punto $p \in M$. Ora, anche se $L_p(f, B)$ dipende dalla scelta della funzione definente f e della base B di $T_{1,0\,p}(M)$, si dimostra che i suoi autovalori dipendono solo dal dominio (si veda [11]). Facendo alcune assunzioni, è possibile recuperare gli autovalori di $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$ senza passare esplicitamente per una base ortonormale di $T_{1,0\,p}(M)$. Sia dunque $p \in M$, e si assuma, poichè $\partial_p f \neq 0$, che $f_{N+1}(p) \neq 0$; e sia

$$\alpha_j := \alpha_j(p) = \frac{f_j(p)}{f_{N+1}(p)}$$

Allora $\{Z_j\}_{j=1,\ldots,N}$ con

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_{N+1}}$$

risulta essere una base (non ortonormale) di $T_{1,0\,p}(M)$. Si definiscano adesso $A = (A_{j\bar{k}})_{j,k=1,\ldots,N}$ con

$$A_{j\bar{k}} = A_{j\bar{k}}(p) = \langle Hess_p^T(f) Z_j, Z_k \rangle = \mathcal{L}(Z_j, \overline{Z}_k)$$

e

$$H = H(p) = I_N - \frac{\alpha^T \overline{\alpha}}{1 + |\alpha|^2}$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Vale (si veda [11]):

Proposizione 2.1. *Gli autovalori della forma di Levi normalizzata* $(\mathcal{L}_{j\bar{k}})_{j,k=1,\ldots,N}$*, sono gli stessi della matrice* $\dfrac{1}{|\partial_p f|} AH$.

A questo punto si può calcolare la traccia (pesata) della forna di Levi in funzione delle matrici A e H:

$$\frac{1}{N}tr((\mathcal{L}_{j\bar{k}})_{j,k=1,\dots,N}) = \frac{1}{N}\frac{1}{|\partial_p f|}tr(AH) \tag{1}$$

Esempio 2.2. *Sia $D = B(z_0, R)$ la palla di centro z_0 e raggio R contenuta in $\mathbb{C}^{N+1}$ definita da $f(z) = |z - z_0|^2 - R^2$, cioè $D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) < 0\}$ e $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) = 0\}$. Si ha allora, per ogni $p \in \partial D$, che $\partial_p f = \overline{z} - \overline{z_0}$, $|\partial f| = R$ e $Hess_p(f) = I_{N+1}$. Risulta $L_p(f, B) = \frac{1}{R}I_N$ così*

$$\frac{1}{N}\frac{1}{|\partial_p f|}tr(AH) = \frac{1}{R}$$

3 La traccia per i grafici cartesiani

Sia $n = 2N + 1$, $N \geq 1$, e si identifichi $\mathbb{C}^{N+1}$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$z = (z_1, \dots, z_{N+1}) = (x_1 + iy_1, \dots, x_N + iy_N, t + is) \approx$$

$$\approx (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t, s) = (x, y, t, s)$$

Ponendo $f(z) = u(x, y, t) - s$, con $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u(x, y, t) < s\}$$

$$\partial D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u(x, y, t) = s\},$$

inoltre:

$$\partial f = \frac{1}{2}(f_{x_1} - if_{y_1}, \dots, f_{x_N} - if_{y_N}, f_t - if_s) =$$

$$= \frac{1}{2}(u_{x_1} - iu_{y_1}, \dots, u_{x_N} - iu_{y_N}, u_t + i)$$

$$|\partial f| = \frac{1}{2}(u_{x_1}^2 + u_{y_1}^2 + \dots + u_{x_N}^2 + u_{y_N}^2 + u_t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(|Du|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

dove $Du = grad(u)$. Si può pensare allora l'epigrafico di u come un dominio $D \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$ e il grafico di u come il rispettivo bordo: in questo modo si riesce a scrivere la traccia della forma di Levi per grafici di funzioni reali. Siano

$$D^2u = Hess(u)$$

$$a_j := -Re(\alpha_j) = \frac{-u_{x_j}u_t + u_{y_j}}{u_t^2 + 1}$$

$$b_j := Im(\alpha_j) = \frac{-u_{y_j}u_t - u_{x_j}}{u_t^2 + 1}$$

$$c := 1 + |\alpha|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 = \frac{|Du|^2 + 1}{u_t^2 + 1}$$

$$P := Re(\alpha^T \overline{\alpha}) = a^T a + b^T b$$

$$Q := Im(\alpha^T \overline{\alpha}) = a^T b - b^T a$$

$$A = \begin{pmatrix} cI_N - P & -Q & a^T \\ Q & cI_N - P & b^T \\ a & b & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(si noti che la matrice A dipende solo dal gradiente di u, quindi $A = A(Du)$). Ricordando la formula (1), si può allora scrivere:

$$\frac{1}{N} tr((\mathcal{L}_{j\overline{k}})_{j,k=1,\dots,N}) = \frac{1}{N}\frac{1}{|\partial f|} tr\,(HA) = \frac{1}{2N}\frac{u_t^2+1}{(|Du|^2+1)^{\frac{3}{2}}} tr(A(Du)\ D^2 u)$$

oppure

$$\frac{1}{N} tr((\mathcal{L}_{j\overline{k}})_{j,k=1,\dots,N}) = tr(\widetilde{A}(Du)\ D^2 u) \tag{3}$$

avendo posto $\widetilde{A}(Du) = \beta A(Du)$, con

$$\beta = \beta(Du) := \frac{1}{2N}\frac{u_t^2+1}{(|Du|^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Si pensi ora ad un operatore K del secondo ordine che agisce su una funzione $u \in C^2$, nel seguente modo:

$$K(u) := \frac{1}{2N}\frac{u_n^2+1}{(|Du|^2+1)^{\frac{3}{2}}} tr(A(Du)\ D^2 u) = tr(\widetilde{A}(Du)\ D^2 u)$$

Si vede, dalla definizione, che, poichè la matrice A dipende dal gradiente della u, K è un operatore quasilineare. Inoltre K è ellittico degenere, infatti:

Proposizione 3.1. *Sia $\xi \in \mathbb{R}^n$. La matrice $A(\xi)$ è semidefinita positiva, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. In particolare ha un autovalore identicamente nullo.*

4 Soluzione viscosa

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n = 2N+1$, $N \geq 1$. Si consideri $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$F(x, s, \xi, \Lambda) := -tr(\widetilde{A}(\xi)\Lambda) + k(x, s) \tag{4}$$

dove $S(n)$ denota l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$, e sia

$$F(x, s, \xi, \Lambda) = -tr(\widetilde{A}(\xi)\Lambda) + k(x, s) = 0 \tag{5}$$

l'equazione associata. Se $k : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una assegnata funzione continua, non negativa e strettamente crescente rispetto alla seconda variabile, allora F risulta continua e propria secondo la definizione (A.1) e vale il teorema del confronto (A.5), quindi si può applicare il metodo di Perron (A.6) per la risoluzione del Problema di Dirichlet (17). Se, però, k è una costante non negativa, F risulta ancora continua e propria, ma non soddisfa l'ipotesi (16) del teorema del confronto (A.5): si riesce però a dimostrare che quest'ultimo vale anche in questo caso.

Proposizione 4.1. *(principio del confronto per l'equazione di traccia)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto limitato, e sia $k : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una assegnata funzione continua e non negativa; strettamente crescente rispetto a u, oppure costante, allora vale per (5) il teorema del confronto, cioè: se $\underline{u}$ e $\overline{u}$ sono rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscose di (5) in Ω tali che valga $\underline{u}(y) \leq \overline{u}(y)$ per ogni $y \in \partial\Omega$, allora $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Si può allora applicare ora il metodo di Perron (A.6), e si ottiene:

Corollario 4.2. *(del teorema Perron)*
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e si consideri il seguente Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} tr(\widetilde{A}(Du)D^2u) = k(x,u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

con φ continua su $\partial\Omega$. Se esistono una subsoluzione viscosa $\underline{u}$ e una supersoluzione viscosa $\overline{u}$ per (6) tali che valga $\underline{u} = \overline{u} = \varphi$ su $\partial\Omega$. Allora esiste un'unica soluzione viscosa di (6)

A questo punto ci si domanda se esistono delle condizioni che assicurano l'esistenza di subsoluzioni e supersoluzioni viscose. Basandosi sul metodo della costruzione di funzioni barriera, la risposta è affermativa. Vale infatti:

Proposizione 4.3. *Sia $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^2$ tale che $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$ e $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$. Se vale*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} k(x,s) < K_{\partial\Omega}(x) \tag{7}$$

per ogni x in un intorno di $\partial\Omega$ allora esistono $\underline{u}$ e $\overline{u}$ rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscose di (6) tali che valga $\underline{u} = \overline{u} = \varphi$ su $\partial\Omega$.

5 Soluzione viscosa lipschitziana

Si vuole mostrare che la soluzione viscosa di (6) è in realtà una funzione lipschitziana e non solo continua. Per fare ciò si procederà nel seguente modo: si regolarizzerà in maniera ellittica l'equazione (5) in modo da ottenere una soluzione regolare; si dimostrerà un principio del massimo per il gradiente di questa soluzione e infine con un procedimento di passaggio al limite si arriverà alla conclusione.

Sia allora $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^{2,\alpha}$,$0 < \alpha < 1$ tale che $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$ e $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$. Si ponga poi, per $0 < \varepsilon \leq 1$, $\widetilde{A}^\varepsilon(\xi) := \widetilde{A}(\xi) + \varepsilon I_n$, in modo tale che $\widetilde{A}^\varepsilon$ risulti definita positiva e

$$F^\varepsilon(x, s, \xi, \Lambda) := -tr(\widetilde{A}^\varepsilon(\xi)\Lambda) + k(x, s)$$

sia ellittica. Si consideri ora il seguente Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} tr(\widetilde{A}^\varepsilon(Du)D^2u) = k(x, u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

con $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Vale:

Proposizione 5.1. *Sia $k \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Se*

$$i)\frac{\partial k}{\partial u} \geq 0 \tag{9}$$

$$ii)k^2 - (n-1)\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial k}{\partial x_k}\right| \geq 0 \tag{10}$$

allora (8) ammette una soluzione $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} |Du^\varepsilon| = \max_{\partial\Omega} |Du^\varepsilon| \tag{11}$$

A questo punto si scriva

$$Du^\varepsilon = (Du^\varepsilon)^\tau + (Du^\varepsilon)^\nu$$

dove $(Du^\varepsilon)^\tau$ e $(Du^\varepsilon)^\nu$ indicano rispettivamente la componente del gradiente tangente e normale a $\partial\Omega$: visto che $(Du^\varepsilon)^\tau =< D\varphi, \tau >$, resta da stimare la componente normale, cioè la derivata normale $< Du^\varepsilon, \nu >= \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}$, con ν normale esterna a $\partial\Omega$.

Proposizione 5.2. *Sia $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ soluzione di (8). Se*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} k(x, s) < K_{\partial\Omega}(x) \tag{12}$$

per ogni x in un intorno di $\partial\Omega$ allora

$$\sup_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right| \leq C_0 \tag{13}$$

con C_0 dipendente da $u^\varepsilon, D\varphi, D^2\varphi$.

L'ultima cosa che resta da fare adesso è stimare u_ε su $\overline{\Omega}$:

Proposizione 5.3. *Sia $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ soluzione di $F^\varepsilon = 0$, con $k \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ allora*

$$\sup_{\Omega} |u^\varepsilon| \leq \sup_{\partial\Omega} |u^\varepsilon| + C_1 \tag{14}$$

Riassumendo: se valgono le ipotesi di (5.1) e (5.2), il problema di Dirichlet (8) ammette una soluzione $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tale che $\max_{\overline{\Omega}} |Du^\varepsilon| \leq C$, con C dipendente da $\varphi, D\varphi, D^2\varphi$. Ora si vuole provare che per $\varepsilon \to 0$ la successione delle u^ε tende alla soluzione viscosa del problema di Dirichlet non regolarizzato.

Proposizione 5.4. *Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$ e $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$ con $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^{2,\alpha}$,$0 < \alpha < 1$; e sia $k \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Si consideri il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} tr(\widetilde{A}(Du)D^2u) = k(x,u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

con $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Se valgono (9), (10) e (12), allora (15) ammette un'unica soluzione viscosa lipschitziana.

Vale, inoltre, per le soluzioni dell'equazione (5), una stima locale, precisamente:

Proposizione 5.5. *Sia u una soluzione viscosa di*

$$tr(\widetilde{A}(Du)D^2u) = k(x,u)$$

Se $k \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ e $\dfrac{\partial k}{\partial u} > 0$ allora u è localmente lipschitziana.

In particolare, la stima che si ottiene, per soluzioni regolari dell'equazione regolarizzata, è:

$$\forall x \in \Omega, \qquad |Du^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{d^2(x, \partial\Omega)}$$

con C indipendente da ε e dove $d(\cdot, \partial\Omega)$ indica la distanza dal bordo.
Va osservato, che una stima interna di questo tipo, esiste anche per l'equazione di curvatura media classica, senza però condizioni sulla curvatura assegnata: ad esempio nel caso di superfici minime (curvatura media nulla), una stima del genere vale (Bombieri, De Giorgi, Miranda); nell'analogo caso Levi-piatto ($k = 0$), però, non ci si può aspettare nulla di questo tipo, in quanto, ad esempio, ogni funzione della sola variabile x_n risulta essere soluzione.

Appendice

A Cenni sulle soluzioni viscose

In qusta sezione si da la definizione di soluzione viscosa e si enunciano i principali risultati omettendo le dimostrazioni (si veda [4], [7]).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $S(n)$ l'insieme delle matrici simmetriche reali $n \times n$ con l'ordinamento:

$$\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \qquad \text{se} \qquad < \Lambda_1 x, x > \quad \leq \quad < \Lambda_2 x, x >, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

con $\Lambda_1, \Lambda_2 \in S(n)$. Si consideri una funzione $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$, e l'equazione associata

$$F(x, u, \xi, \Lambda) = 0$$

(si può pensare ad F nel seguente modo: se si scegliesse $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, $\xi = Du = grad(u)$, $X = D^2u = Hess(u)$, allora $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ rappresenterebbe un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine).

Definizione A.1. *Se F soddisfa la condizione*

$$F(x, r, p, \Lambda_1) \leq F(x, s, p, \Lambda_2) \qquad se \qquad r \leq s, \quad e \quad \Lambda_1 \geq \Lambda_2,$$

allora F si dice propria.

Definizione A.2. *Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, superiormente semicontinua (s.s.c.). Se, fissato $x_0 \in \Omega$, vale:*

$$u(x) \leq u(x_0) + < \xi, (x - x_0) > + \frac{1}{2} < \Lambda(x - x_0), (x - x_0) > + o(|x - x_0|^2)$$

per $x \to x_0$, si dice che la coppia (ξ, Λ) appartiene al sopradifferenziale del secondo ordine di u in x_0, e si scrive $(\xi, \Lambda) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x_0)$

Questo definisce una mappa $J^{2,+}_{\Omega} u$ che va da Ω ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n \times S(n)$.
Ovviamente $J^{2,+}_{\Omega} u(x)$ dipende da Ω, ma si dimostra che è lo stesso per tutti gli insiemi Ω che hanno x come punto interno: sia $J^{2,+}u$ questo comune valore.
Si definiscono equivalentemente per le funzioni inferiormente semicontinue (i.s.c.) $J^{2,-}_{\Omega} u$ e $J^{2,-}u$; vale $J^{2,-}_{\Omega} u(x) = -J^{2,+}_{\Omega}(-u)(x)$.

Definizione A.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua e propria. Una subsoluzione viscosa di $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ in Ω è una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, s.s.c., tale che*

$$F(x, u(x), \xi, \Lambda) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad e \quad (\xi, \Lambda) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$$

Allo stesso modo, una supersoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω, è una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, i.s.c., tale che

$$F(x, u(x), \xi, \Lambda) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad e \quad (\xi, \Lambda) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$$

Infine, una soluzione viscosa di $F = 0$ in Ω è una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continua tale che sia contemporaneamente subsoluzione e supersoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω.

Osservazione A.4. *Se $x_0 \in \Omega$, vale:*

$$J^{2,+}_{\Omega} u(x_0) = \{(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) : \varphi \in C^2 \quad e \quad u - \varphi \quad ha\ un\ massimo\ locale\ in \quad x_0\}$$

($\varphi \in C^2$ su un intorno di x_0 contenuto in Ω)

Quindi una subsoluzione viscosa di $F = 0$ è una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, s.s.c., tale che

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0, \qquad \forall \varphi \in C^2$$

e tale che $u - \varphi$ ha un massimo locale in x.

Lo stesso vale per le supersoluzioni con le giuste modifiche dei segni.

Teorema A.5. *(del confronto)*

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto limitato, F continua, propria e che soddisfi:

$$\begin{aligned} &\exists\, \gamma > 0 : \gamma(r - s) \leq F(x, r, \xi, \Lambda) - F(x, s, \xi, \Lambda) \\ &\textit{con } r \geq s, \qquad (x, \xi, \Lambda) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \end{aligned} \tag{16}$$

Siano ora $\underline{u}$ e $\overline{u}$ rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscose di $F = 0$ in Ω tali che valga $\underline{u}(y) \leq \overline{u}(y)$ per ogni $y \in \partial\Omega$.

Allora $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, F continua e propria, $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Il Problema di Dirichlet per F è:

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{17}$$

Una subsoluzione viscosa per (17) è una funzione $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che sia subsoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω e valga $u \leq \varphi$ su $\partial\Omega$.

In modo analogo si definiscono le supersoluzioni e le soluzioni.

Teorema A.6. *(di Perron)*

Sia valido il teorema del confronto per F=0. Si supponga inoltre che esistano una subsoluzione viscosa $\underline{u}$ e una supersoluzione viscosa $\overline{u}$ per (17) tale che valga $\underline{u} = \overline{u} = \varphi$ su $\partial\Omega$. Allora esiste un'unica soluzione viscosa di (17)

Riferimenti bibliografici

[1] E. Bedford, B. Gaveau, *Hypersurfaces with bounded Levi form*, Indiana Univ. Math. J., 27, 5, 867-873, 1978

[2] A. Bogges, *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, 1991

[3] G. Citti, E. Lanconelli, A. Montanari, *Smoothness of Lipschitz-continuos graphs with nonvanishing Levi curvature*, Acta Math., 188, 87-128, 2002

[4] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's guide to viscosity solution of second order partial differential equations*, Bulletin of the american mathematical society, volume 27, number 1, july 1992

[5] J.P. D'Angelo, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, 1993

[6] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer-Verlag, 1983

[7] H. Ishii, P.L. Lions, *Viscosity solution of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, Journal of differential equations 83, 26-78, 1990

[8] D. Jerison, J.M. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Diff. Geometry, 25,167-197, 1987

[9] S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wiley, New York, 1982

[10] V. Martino, A. Montanari, *Lipschitz continuous graphs with prescribed Levi mean curvature*, Lavoro in fase di stesura

[11] A. Montanari, E. Lanconelli, *Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators: strong comparison theorems*, Journal of differential equations 202, 306-331, 2004

[12] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of holomorphy*, J. Funct. Anal., 101, 4, 392-407, 1991

[13] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *The Levi equation in higher dimension and relationships to the envelope of holomorphy*, Amer. J. Math., 116, 479-499, 1994

[14] N. Tanaka, *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Kinokuniya Book Store Co., Ltd., Kyoto, 1975

[15] G. Tomassini, *Geometric properties of solutions of the Levi equation*, Ann. Mat. Pura Appl., 4, 152, 331-344, 1988

[16] S.M. Webster, *Pseudohermitian structures on a real hypersurfaces*, J. Diff. Geometry, 13, 25-41, 1978